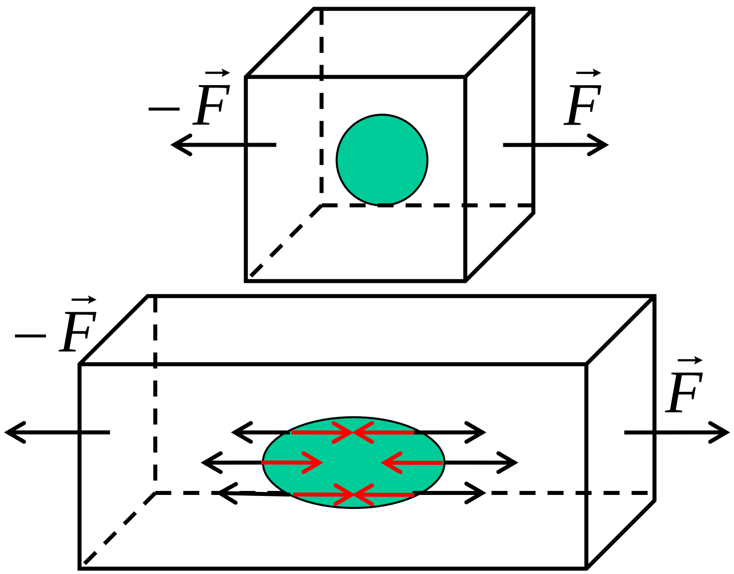
Opakování - Mechanika kontinua – napětí a deformace



• Plošné síly např. tahová síla působící na kontinuum v jednom směru vede obecně k **deformaci kontinua**.

• Při této deformaci kontinua dojde tedy ke změně rovnovážné polohy částic, což má za následek vznik sil mezi částicemi – tedy vznik **napětí**, které se snaží kontinuum vrátit do původního stavu. Po ustavení rovnováhy mluvíme o stavu napjatosti.

• Síly jsou rozděleny po ploše vyšetřované části kontinua a podílem:

$$\vec{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}S}$$

• Napětí můžeme pomocí normálové a tečné složky elementární síly rozdělit na normálovou a tečnou složku napětí:

$$\vec{\sigma}_n = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_n}{\mathrm{d}S}, \qquad \vec{\sigma}_t = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_t}{\mathrm{d}S}$$

Opakování - Mechanika kontinua – pohybová rovnice kontinua

• **Tenzor napětí:**

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

• Z rovnováhy výsledného momentu sil plyne: $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$

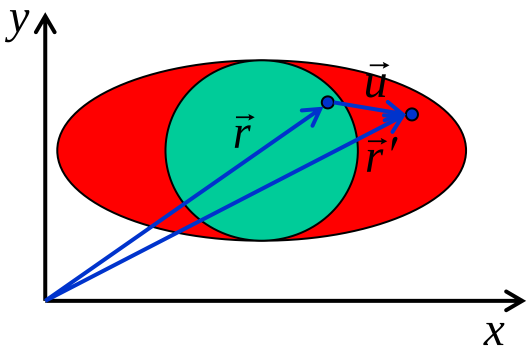
• Po limitním zmenšení a zkrácení objemu dostaneme **pohybovou rovnici kontinua**:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + G_x = \rho \frac{\mathrm{d}^2 u_x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + G_y = \rho \frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}t^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + G_i = \rho \frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2}, \quad i = x, y, z$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + G_z = \rho \frac{\mathrm{d}^2 u_z}{\mathrm{d}t^2} \qquad kde \quad \vec{G} = \lim_{V \to 0} \frac{\vec{F}}{V}$$

Opakování - Mechanika kontinua – napětí a deformace



• Vektor posunutí je závislý na souřadnicích, může se od místa k místu měnit:

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$$

• Změníme-li polohový vektor podél osy *x* o element d*x* změní se posunutí o du_x. Takovou deformaci ve směru osy *x* označíme:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \doteq \frac{l_x - l_{x0}}{l_{x0}}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \doteq \frac{l_y - l_{y0}}{l_{y0}}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \doteq \frac{l_z - l_{z0}}{l_{z0}}$$

• Deformace způsobené smykovými napětími :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}\right), \quad i, j = x, y, z$$

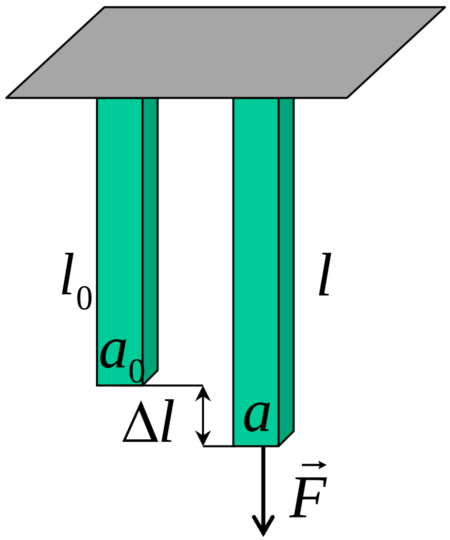
• Vztah mezi vektorem posunutí a polohovým vektorem u homogenní deformace je určen **tenzorem malých deformací**:

$$\vec{u} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{r}, \quad kde \quad \overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

• Tenzor malých deformací je symetrický stejně jako tenzor napětí:

$$\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$$

Opakování - Mechanika kontinua – Hookeův zákon



• Úkolem nauky o deformaci pevných látek je zjistit kvantitativní vztah mezi deformacemi a napětími, které v tělesech budí vnější síly.

• Bude-li mít tyč všude stejný průřez, bude všude stejné i normálové napětí:

$$\sigma_n = \frac{F}{S}$$

• Poměr ε udává číselné prodloužení tyče jednotkové délky a nazývá se **relativní (poměrné) prodloužení**.:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = k\sigma_n = \frac{\sigma_n}{E}$$

kde E je **Youngův modul** neboli **modul pružnosti v tahu**.

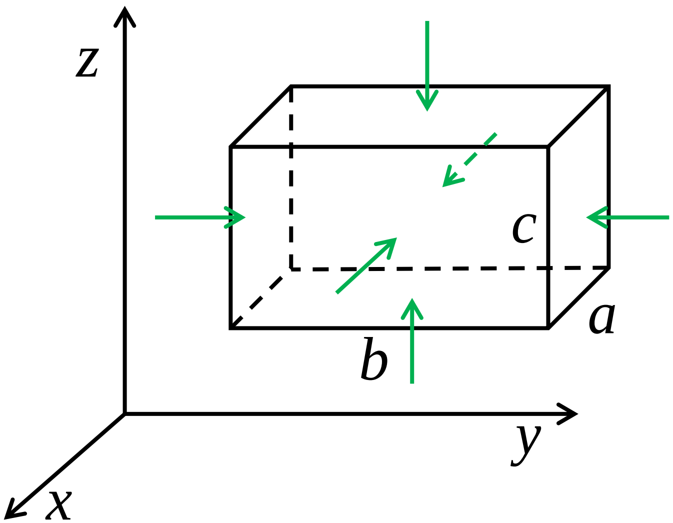
• Při podélném namáhání tyče se průřez zmenšuje se zvětšujícím se zatížením. Prodloužení tyče vede tedy ke zkrácení strany a příčného řezu, můžeme tedy analogicky zavést **relativní (poměrné) příčné zkrácení** tyče:

$$\eta = \frac{a_0 - a}{a_0} = k_l \sigma_n$$

• Dosadíme-li za normálové napětí z Hookova zákona dostaneme:

$$\eta = k_l \sigma_n = k_l E \varepsilon = \frac{1}{\mu_P}\varepsilon = \frac{1}{\mu_P E}\sigma_n$$

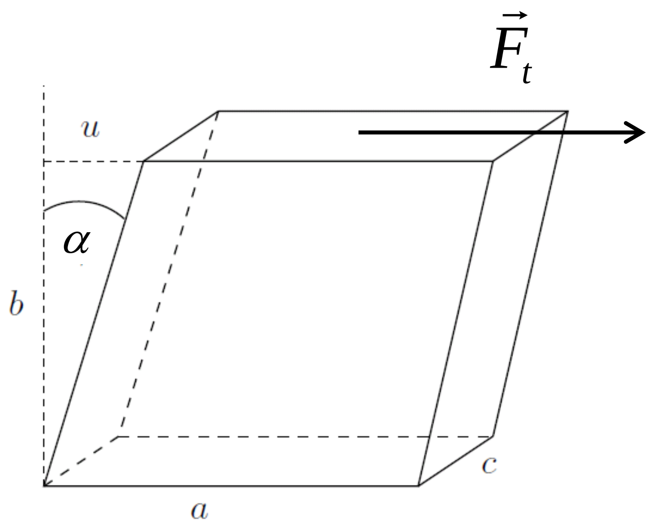
Opakování - Mechanika kontinua – Hookeův zákon



- Pro relativní změnu objemu dostáváme:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = -3(\varepsilon - 2\eta) \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -3\left(\frac{1}{E} - \frac{2}{\mu_P E}\right)\sigma_n = -\frac{3(\mu_P - 2)}{\mu_P E}\sigma_n$$



- Při smykové deformaci platí opět Hookeův zákon:

$$\alpha = k\sigma_t = \frac{1}{G}\sigma_t$$

- kde k je **součinitel posunutí** a G je **modul pružnosti ve smyku.**

$$G = \frac{\mu_P E}{2(\mu_P + 1)} = \frac{E}{2(1 + \nu_P)}$$

$$0 \geq \nu_P \geq \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{E}{3} \leq G \leq \frac{E}{2}$$

Mechanika kontinua-deformace pevných látek, zobecněný Hookeův zákon

• Úkolem nauky o deformaci pevných látek je zjistit kvantitativní vztah mezi deformacemi a napětími, které v tělesech budí vnější síly.

• Předpoklad o přímé úměrnosti mezi napětím a deformací, známý z elementárního **Hookeova zákona** pro tah a smyk lze zobecnit a vyjádřit vztahem:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=x,y,z} \sum_{l=x,y,z} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = x, y, z$$

• Koeficienty C_{ijkl} popisují vlastnosti studované látky a budeme jim říkat **elastické koeficienty**. Tyto koeficienty jsou složkami tenzoru 4. řádu a mají 3^4 tj. 81 složek. Vzhledem k tomu, že tenzory napětí a deformace jsou symetrické tenzory druhého řádu, uvážíme-li ještě krystalovou symetrii, potom se redukuje počet nezávislých složek na 21 v případě triklinické krystalové soustavy a na 3 v případě krychlové krystalové soustavy.

• Pro **izotropní těleso**, které má fyzikální vlastnosti stejné ve všech směrech, se počet nezávislých koeficientů redukuje na dva a **zobecněný Hookeův zákon** dostaneme ve tvaru:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_I + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad kde \quad \varepsilon_I = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad a \quad \delta_{ij} = 0\,(i \neq j), \delta_{ij} = 1\,(i = j)$$

kde λ a μ jsou **Laméovy koeficienty**. Jsou-li elastické vlastnosti látky popsané **Youngovým modulem** a **modulem pružnosti ve smyku** je zobecněný Hookeův zákon:

$$\sigma_{ij} = \frac{G(E-2G)}{3G-E} \delta_{ij} \varepsilon_I + 2G\varepsilon_{ij} \quad kde \quad \lambda = \frac{G(E-2G)}{3G-E} \quad a \quad \mu = G$$

Mechanika kontinua - pružnost

• Základní úlohou teorie pružnosti je najít napětí a deformaci v každém bodě tělesa, známe-li rozložení napětí, nebo deformaci na povrchu tělesa.

• Pro každý bod kontinua máme najít sl.ožky tenzoru napětí a složky vektoru posunutí, ktré vyhovují rovnicím rovnováhy kontinua:

$$\sum_{j=x,y,z} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + G_i = 0, \quad i = x, y, z$$

a Hookeově zákonu:

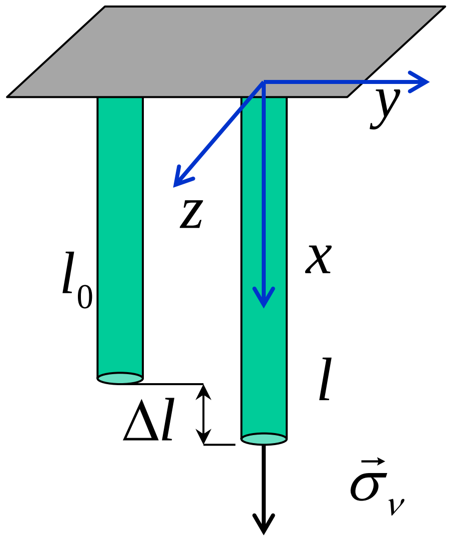
$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_I + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad kde \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right)$$

• Známe-li vektory napětí na povrchu tělesa, můžeme při stanovení počátečních podmínek vyjít z rovnice:

$$\vec{\sigma}_\nu = \vec{\vec{\sigma}} \vec{\nu}, \quad tedy \quad \sigma_{\nu i} = \sum_{j=x,y,z} \sigma_{ij} \nu_j, \quad kde \quad i = x, y, z$$

Která musí být splněna v bodech na povrchu tělesa.

Mechanika kontinua – pružnost - tah



- Při vyšetřování tahu můžeme zanedbat působení vlastní tíhy vzorku, objemová síla je tedy nulová.

$$G_i = 0, \quad i = x, y, z$$

- Rovnici rovnováhy můžeme splnit, pokládáme-li složky tenzoru napětí za konstantní v celém objemu vzorku:

$$\sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij} = konst \Rightarrow \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} = 0$$

- Vektor napětí na spodní, horní ploše vzorku má složky:

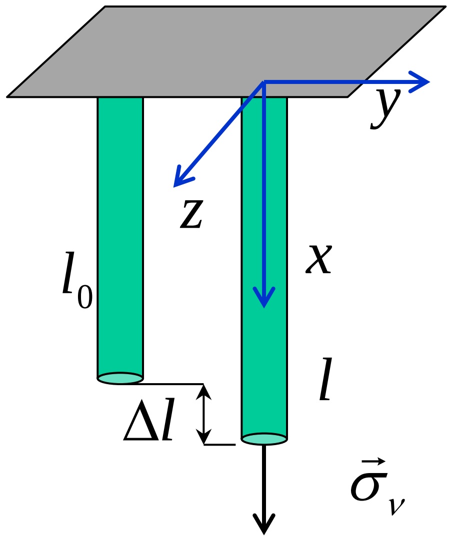
$$\vec{\sigma}_\nu = \left(\frac{F}{S}, 0, 0\right), \quad \vec{\sigma}_\nu = \left(-\frac{F}{S}, 0, 0\right)$$

- Okrajové podmínky na spodní a horní podstavě vzorku:

$$\sigma_{\nu i} = \sum_{j=x,y,z} \sigma_{ij} \nu_j \quad pro \quad \nu = (1, 0, 0) \;\Rightarrow\; \sigma_{xx} = \frac{F}{S}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0$$

$$pro \quad \nu = (-1, 0, 0) \;\Rightarrow\; \sigma_{xx} = \frac{F}{S}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0$$

Mechanika kontinua – pružnost - tah



•Vektor napětí má na válcové ploše vzorku nulovou hodnotu:

$$\vec{\sigma}_\nu = (0, 0, 0)$$

• Okrajové podmínky na válcové ploše vzorku(předpokládáme, že složky tenzoru napětí jsou konstantní v celém vzorku):

$$\sigma_{\nu i} = \sum_{j=x,y,z} \sigma_{ij} \nu_j \quad pro \quad \vec{\nu} = (0, \nu_y, \nu_z)$$

$$\Rightarrow 0 = \sigma_{yy}\nu_y + \sigma_{zy}\nu_z, \quad 0 = \sigma_{yz}\nu_y + \sigma_{zz}\nu_z$$

$$\Rightarrow \sigma_{yy} = 0, \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = 0$$

• Hodnoty složek napětí dosadíme do Hookeova zákona:

$$\frac{F}{S} = \sigma_{xx} = \lambda\varepsilon_I + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

$$0 = \lambda\varepsilon_I + 2\mu\varepsilon_{yy}, 0 = \lambda\varepsilon_I + 2\mu\varepsilon_{zz} \Rightarrow \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$$

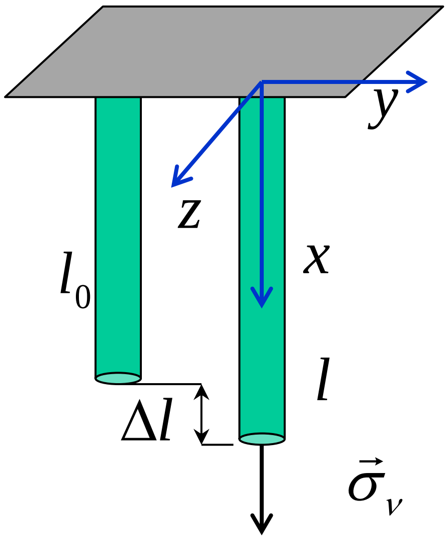
$$\varepsilon_I = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \Rightarrow \quad \varepsilon_{yy} = \frac{-\lambda}{2(\lambda + \mu)}\varepsilon_{xx}$$

$$0 = 2\mu\varepsilon_{xy}, 0 = 2\mu\varepsilon_{xz}, 0 = 2\mu\varepsilon_{yz} \Rightarrow \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\varepsilon_{xx}$$

$$\frac{F}{S} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\varepsilon_{xx}$$

Mechanika kontinua – pružnost - tah



•Ve výsledku tedy:

$$\frac{F}{S} = \sigma_{xx} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\varepsilon_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E\frac{\Delta l}{l}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

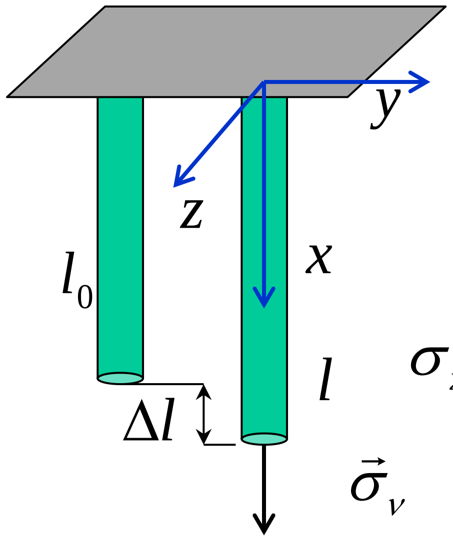
• Pro homogenní deformaci, kdy jsou složky vektoru posunutí přímo úměrné souřadnicím:

$$u_x = \varepsilon_{xx}x + \varepsilon_{xy}y + \varepsilon_{xz}z$$
$$u_y = \varepsilon_{yx}x + \varepsilon_{yy}y + \varepsilon_{yz}z$$
$$u_z = \varepsilon_{zx}x + \varepsilon_{zy}y + \varepsilon_{zz}z$$

• Dostáváme pro vektor posunutí:

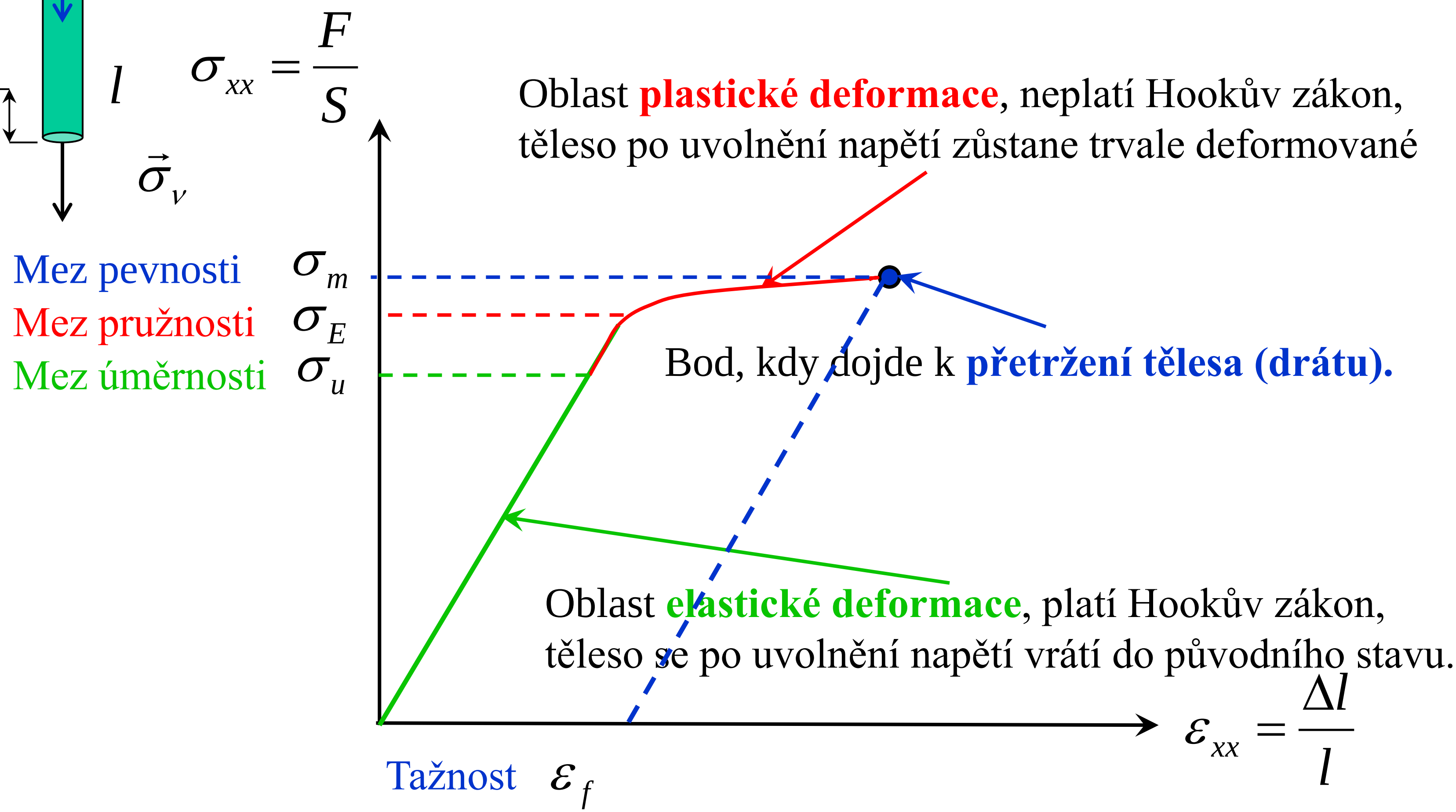
$$u_x = \varepsilon_{xx}x = \frac{\sigma_{xx}}{E}x$$
$$u_y = \varepsilon_{yy}y$$
$$u_z = \varepsilon_{zz}z$$

Mechanika kontinua – pružnost – tah, meze platnosti Hookova zákona



•Hookův zákon – lineární závislost napětí na relativním prodloužení:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$$

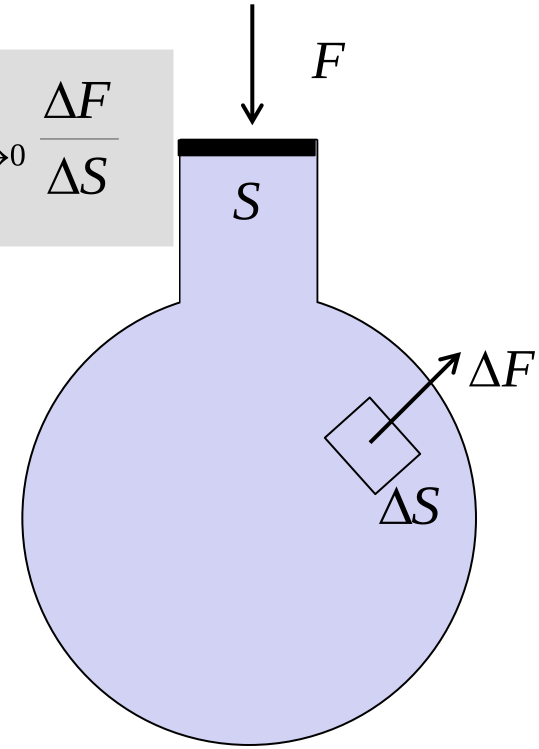


Mechanika tekutin – Rovnováha, Hydrostatika

• **Tekutiny** – společné označení pro kapaliny a plyny.

• Tlak: $p = \dfrac{F}{S}$ $\quad [\mathrm{Pa}] = \left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$



• **Dokonalá tekutina** – spojitě rozprostřená látka, pro kterou v každém bodě platí :

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p, \quad \sigma_{ij} = 0 \ pro \ i \neq j$$

$$p \geq 0$$

• **Smyková napětí** jsou v dokonalé tekutině vždy **nulová**, modul pružnosti ve smyku je nulový G=0. Dokonalá tekutina se nebrání změně tvaru.

• V ideální tekutině **nelze realizovat tahová napětí**.

• **Dokonalá kapalina** je **nestlačitelná**: $\rho(\vec{r}) = konst, \quad p \geq 0$

• Jelikož se objem dokonalé kapaliny nemění, je první invariant tenzoru deformace nulový:

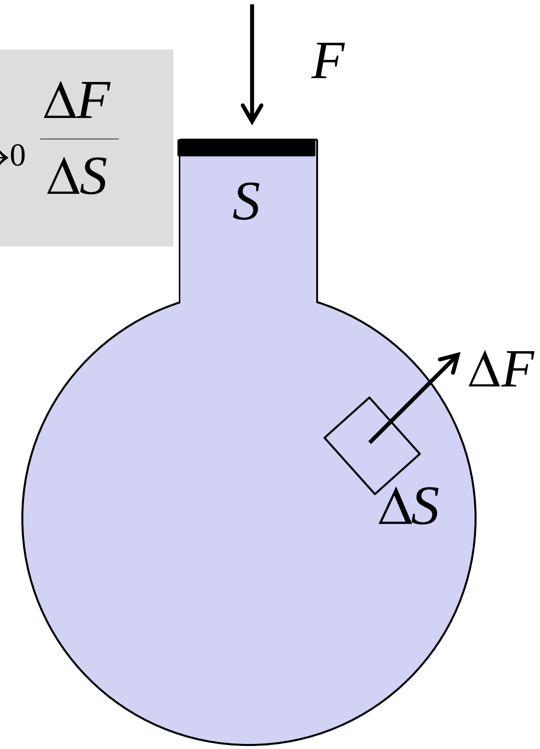
$$V = abc \doteq a_0 b_0 c_0 + a_0 b_0 c_0 \left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = V_0 + V_0 \varepsilon_I \Rightarrow \varepsilon_I = \frac{V - V_0}{V_0} = 0$$

Mechanika tekutin - Rovnováha

• **Dokonalý plyn** je stlačitelný, známe-li stavovou rovnici plynu (např. pro ideální plyn $pV/T = n\mathrm{R} = n\mathrm{N_A k_B} = konst.$), můžeme určit hustotu plynu jako funkci tlaku v daném místě:

$$\rho = \rho\left(p(\vec{r})\right)$$

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$



• I pro tekutiny platí rovnice rovnováhy kontinua:

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}\, p \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial i} + G_i = 0, \quad i = x, y, z$$

$$\nabla p \equiv \mathrm{grad}(p) \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}, \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}, \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \right) = \vec{G}$$

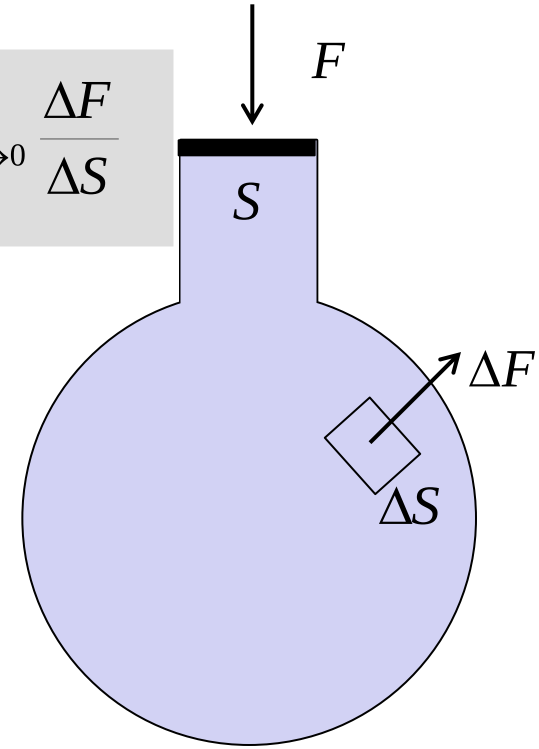
• U kapalin je hustota konstantní a objemové síly můžeme stanovit před řešením rovnice rovnováhy.
• U plynů ale závisí hustota na tlaku a je výhodnější do rovnice zavést intenzitu silového pole, hovoříme potom o **rovnici hydrostatické rovnováhy** :

$$\vec{I} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{V\vec{G}}{m} = \frac{\vec{G}}{\rho(p)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho(p)}\mathrm{grad}(p) = \vec{I}, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial i} = I_i, \quad i = x, y, z$$

Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon

• Pro kapalinu (ρ=konst.) jsou parciální derivace tlaku nezávislé na tlaku. Objemovými silami je tedy rozložení tlaku (řešení rovnice) v kapalině určeno až na aditivní konstantu: $f(\vec{r}), \quad p(\vec{r}) = f(\vec{r}) + k$

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$



Okrajové podmínky (určení jedné konstanty) se redukují na znalost tlaku v libovolném jednom bodě kapaliny. Změníme-li v tomto bodě tlak, změní se o stejnou hodnotu i konstanta *k* a tím i tlak libovolném bodě kapaliny.

$$p(\vec{r}_0) = p_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = f(\vec{r}_0) + k \quad \Rightarrow \quad k = p_0 - f(\vec{r}_0)$$

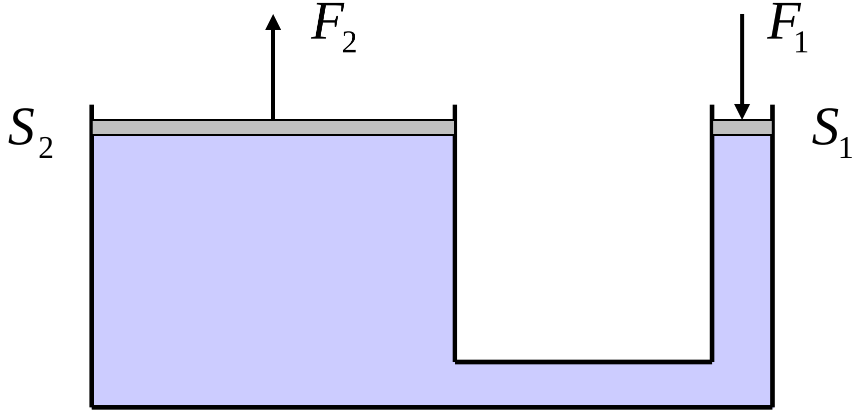
$$p(\vec{r}_0) = p_0 + \Delta p \quad \Rightarrow \quad p_0 + \Delta p = f(\vec{r}_0) + k \quad \Rightarrow \quad k = p_0 - f(\vec{r}_0) + \Delta p$$

•**Pascalův zákon: „**Změna tlaku v jednom místě kapaliny způsobí stejnou změnu tlaku v celém objemu kapaliny, pokud je před změnou i po změně kapalina v rovnováze.“

Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon

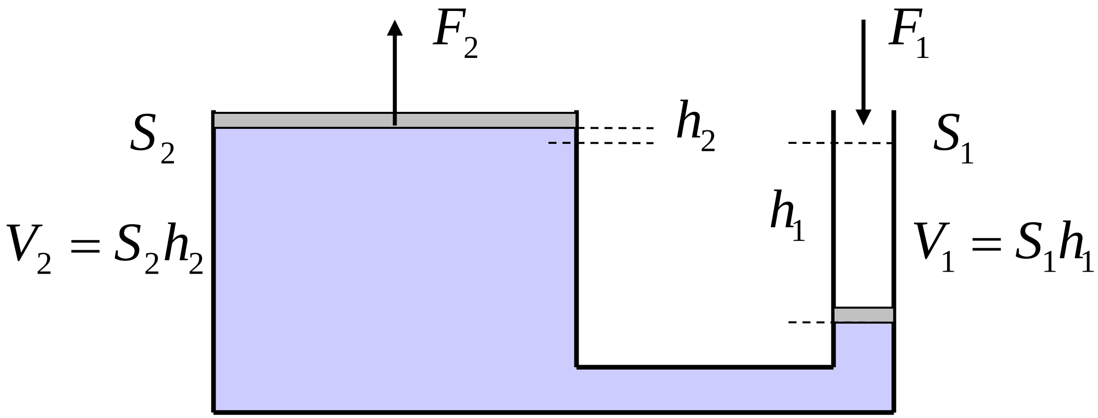
- Hydraulický lis, můžeme zanedbat objemové síly:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial z}=0 \quad \Rightarrow \quad p=konst.$$

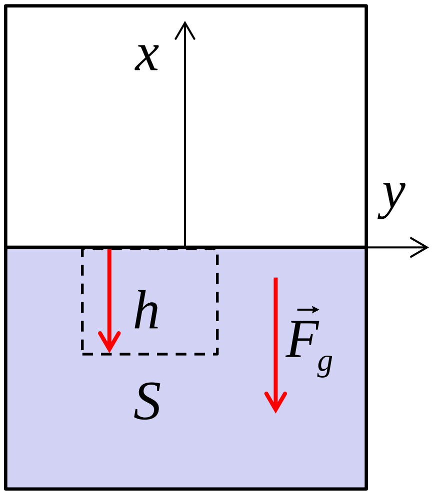


$$p_1=\frac{F_1}{S_1}=p_2=\frac{F_2}{S_2} \quad \Rightarrow \quad F_2=\frac{S_2}{S_1}F_1$$

- Práce: $V_1=V_2 \Rightarrow S_1h_1=S_2h_2 \quad \Rightarrow \quad F_1h_1=F_2h_2$



Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon



- Tekutina v tíhovém poli $F_x = -mg$

- Vyjdeme z rovnice hydrostatické rovnováhy :

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial i} = I_i, \quad I_x = \frac{F_x}{m} = -g, \quad I_y = 0, \quad I_z = 0$$

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial x} = -g, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

- Tlak nezávisí tedy na souřadnicích *y* a *z*.

- Pro dokonalou (nestlačitelnou) kapalinu je ρ = konst. Dostaneme tedy pro **hydrostatický tlak**:

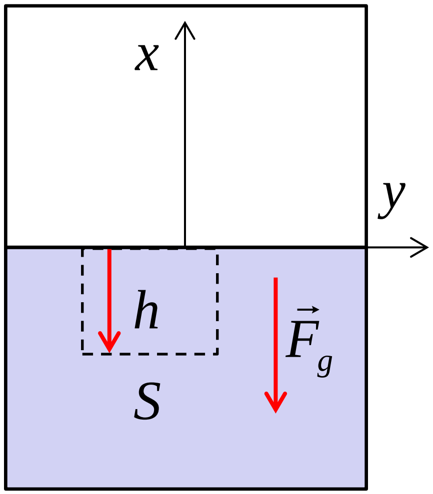
$$\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} = -\rho\, g \quad \Rightarrow \quad p(x) = -\rho g x + k$$

- Na hladinu *x* = -*h* = 0 nám působí pouze barometrický tlak *b*:

$$p(0) = b = -\rho g 0 + k \quad \Rightarrow p(h) = h\rho g + b$$

$$\Delta p = p(h) - p(0) = h\rho g$$

Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon



- Tekutina v tíhovém poli
- Vyjdeme z rovnice hydrostatické rovnováhy :

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial i} = I_i, \quad I_x = -g, I_y = 0, I_z = 0$$

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial x} = -g, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

- Tlak nezávisí tedy na souřadnicích *y* a *z*.

- Závislost tlaku plynu na výšce v tíhovém poli lze určit pokud známe stavovou rovnici plynu:

$$pV = nRT = \frac{m}{M}N_A k_B T, \quad \frac{N_A k_B T}{M} = C \quad \Rightarrow \rho(p) = \frac{m}{V} = \frac{p}{C} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{g}{C}p$$

$$p(x) = Ae^{\alpha x} \quad \Rightarrow A\alpha e^{\alpha x} + A\frac{g}{C}e^{\alpha x} = 0 \quad \Rightarrow \alpha = -\frac{g}{C} \quad \Rightarrow p(x) = Ae^{-\frac{g}{C}x}$$

- U hladiny moře $x = 0$ nám působí tlak p_0 a hustota ρ_0. Pro **barometrickou rovnici** dostáváme:

$$p(0) = p_0 = Ae^0, \quad \frac{1}{C} = \frac{\rho_0}{p_0} \quad \Rightarrow p(x) = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gx}, \quad kde \quad p_0 \doteq 10^5\,\mathrm{Pa}, \rho_0 \doteq 1{,}2\,\mathrm{kgm}^{-3}$$